ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 999 (2015). С. 1–14

УДК 517.55, 517.51

ЭСКИЗ ТЕОРИИ РОСТА ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В МНОГОМЕРНОМ ТОРЕ

© 2015 г. **М. Н. ЗАВЬЯЛОВ, Л. С. МАЕРГОЙЗ**

Аннотация. Разработан подход к построению теории роста класса $H(\mathbb{T}^n)$ функций, голоморфных в многомерном торе $\mathbb{T}^n$, базирующийся на структуре элементов этого класса и известных результатах теории роста целых функций многих комплексных переменных. Он иллюстрируется в ситуации, когда рост функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ сравнивается с ростом ее максимума-модуля на остове полидиска. Исследуются свойства соответствующих характеристик роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$, их связь с коэффициентами разложения в ряды Лорана этих функций. Проводится сравнительный анализ этих результатов и аналогичных утверждений теории роста целых функций многих переменных.

***Ключевые слова*:** целая функция многих переменных, голоморфная функция в многомерном торе, выпуклая функция, характеристики роста, кратный ряд Лорана, носитель, строго выпуклый конус.

***AMS Subject Classification*:** 32A15, 30C45

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В работах [2], [3] был рассмотрен класс $H(\mathbb{T}^n)$ функций, голоморфных в многомерном торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{C}_*^n$, где $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n > 1$, являющийся расширением класса $H(\mathbb{C}^n)$ целых функций n комплексных переменных. В нем был выделен собственный подкласс $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ функций, эквивалентных целым функциям в следующем смысле: функция $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, если существует мономиальное голоморфное отображение $\mathcal{F}$ такое, что $f = g \circ \mathcal{F}$ – целая функция. Интерес к этим классам объясняется современными исследованиями по анализу на торических многообразиях [7], [9].

Теория целых функций многих переменных довольно хорошо разработана (см., например, [5], [10], [6]). Цель данной статьи – дать импульс к развитию теории роста функций, голоморфных в многомерном торе. Структура функций класса $H(\mathbb{T}^n)$ изучалась в [2], [3], где рассматривались и показатели их роста. В [12] изложен подход к развитию теории роста функций класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ на примере изучения свойств их преобразования Лапласа–Бореля, опирающийся на соответствующие результаты в случае целых функций.

В данной статье исследуются свойства характеристик роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$ в случае, когда рост функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ сравнивается с ростом ее максимума-модуля

$$M_g(r) = \max\{|g(z)| : |z_k| = r_k,\ k = 1, ..., n\}, \quad r \in \mathbb{R}_0^n;\ \mathbb{R}_0 = \{r > 0 :\ r \in \mathbb{R}\} \tag{1}$$

на остове полидиска, опираясь на известные результаты по теории роста функций класса $H(\mathbb{C}^n)$ в [1], [11] (гл. 6-8). В частности, изучается связь показателей роста с коэффициентами разложения функции g в ряд Лорана. Доказательства полученных утверждений приводятся лишь тогда, когда они существенно отличаются от доказательств аналогичных фактов в случае класса $H(\mathbb{C}^n)$.

2. Функции класса $H(\mathbb{T}^n)$, эквивалентные целым функциям

Естественным аналогом целых функций одной переменной являются функции, аналитические на сфере Римана, за исключением одной точки. Подобного аналога в случае нескольких переменных нельзя ожидать: аналитические функции многих переменных не имеют изолированных особенностей. "Макет"многомерного аналога этого результата "подсказывает"следующий вариант теоремы Адамара-Валирона.

Теорема 2.1. *Пусть $g(z) = g(z_1, ..., z_n)$ – функция, голоморфная в торе $\mathbb{T}^n$, $n > 1$; $M_g(r)$ – ее модуль-максимум на остове полидиска* (см. **??**). *Тогда и $M_g(r)$, и $\ln M_g(r)$ – выпуклые функции от $\ln r_1, ..., \ln r_n$.*

В том случае, когда g - след на $\mathbb{T}^n$ целой функции, $M_g(r)$ – возрастающая функция по каждой переменной. Поэтому

$$V_g(u) = \ln M_g(e^u) := \ln M_g(e^{u_1}, ..., e^{u_n}), \quad u \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

– выпуклая функция с выпуклым конусом K_V направлений ее убывания, содержащим $\mathbb{R}^n_- \setminus 0$, где $\mathbb{R}_- = \{u \in \mathbb{R} : u \leqslant 0\}$.

2.1. Выпуклые функции, эквивалентные возрастающим функциям. Для строгого определения конуса K_V понадобятся следующие факты выпуклого анализа.

Теорема 2.2. ([13], Theorem 8.5). *Пусть $V = V(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$ – конечная выпуклая функция. При любом $a \in \mathbb{R}^n$ существует независящий от a предел*

$$\gamma_V(u) = \lim_{t\to\infty} \frac{V(tu + a) - V(a)}{t} = \sup_{t>0} \left\{ \frac{V(tu + a) - V(a)}{t} \right\} \quad \forall\ u \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Кроме того, функция γ_V – положительно однородная выпуклая функция, принимающая возможно и значение $+\infty$.

Функцию γ_V называют *асимптотической* (или рецессивной) функцией V. В [13], § 8 это определение дано в эквивалентной форме (см. [1], [11], гл. 1, § 6).

Теорема 2.3. ([13], Theorem 8.6, Corollary 8.6.1). *Для того чтобы след $\varphi(t) = V(ut+a)$, $t \in \mathbb{R}$ выпуклой функции $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n (n > 1)$ на прямой $\Gamma(u, a) = \{ut + a,\ t \in \mathbb{R}\}$, где $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, была непостоянной убывающей функцией, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\gamma_V(u) \leqslant 0$, $\gamma_V(-u) > 0$.*

В частности, если при фиксированном $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ имеем $\gamma_V(u) = \gamma_V(-u) = 0$, то функция V постоянна на прямой $\Gamma(u, a)$. Этот результат стимулировал ввести следующее

Определение 2.1. ([2]; [3], определение 1.6). Пусть $V(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$ – выпуклая функция, а γ_V – ее асимптотическая функция. Множество

$$K_V = \{u \in \mathbb{R}^n :\ \gamma_V(u) \leqslant 0\} \tag{4}$$

назовем *конусом направлений убывания* функции V.

Перейдем к изложению критерия эквивалентности заданной выпуклой функции выпуклой функции, возрастающей по каждой переменной (обобщение теоремы 1.9 в [2], [3]). Для этого нужна

Лемма 2.1. *В условиях и обозначениях определения* 2.1 *рассмотрим множество*

$$L_V = \{u \in K_V : \ \gamma_V(u) = \gamma_V(-u) = 0\}. \tag{5}$$

Тогда L_V – линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, причем $V(u) \equiv V(0)\ \forall\ u \in L_V$.

Доказательство. 1. Пусть $u \in L_V,\ \tau \in \mathbb{R}$. Из свойства положительной однородности функции γ_V имеем $\tau u \in L_V$ (см. теорему 2.2, (5)). Поскольку, кроме того, γ_V – выпуклая функция, то

$$\gamma_V[\pm(x+y)] \leqslant \gamma_V(\pm x)] + \gamma_V(\pm y) = 0 \quad \forall\ x, y \in L_V.$$

С другой стороны,

$$0 = \gamma_V(0) \leqslant \gamma_V(x+y) + \gamma_V[(-x-y)] \quad \forall\ x, y \in L_V.$$

Отсюда вытекает, что $\gamma_V(x+y) = \gamma_V[(-x-y)] = 0$, т.е. $x+y \in L_V$. Поэтому L_V – линейное подпространство $\mathbb{R}^n$.

При $a = 0$ из формулы (3) заключаем:

$$V(ut) \leqslant V(0) + \gamma_V(ut) \quad \forall\ t \geqslant 0,\ u \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, $V(u) \leqslant V(0)\ \forall\ u \in L_V$ (см. (5)). Так как функция V выпукла и ограничена сверху на L_V, то она постоянна здесь (см. [13], Corollary 8.6.2). Лемма доказана. □

Теорема 2.4. *Пусть $V(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ – выпуклая функция, отличная от постоянной; γ_V – ее асимптотическая функция; K_V – конус направлений убывания V; L_V – подмножество K_V* (см. (3)-(5)). *Равенства $\dim K_V = n,\ \dim L_V = m$, где $0 \leqslant m < n$, выполняются тогда и только тогда, когда существует невырожденное линейное отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ u = Av$ со свойством $W(v) := V(Av),\ v \in \mathbb{R}^n$ – выпуклая функция, возрастающая по каждой из переменных $v_1, ..., v_p$, где $p = n - m$, а при условии $m > 0$ независящая от остальных переменных $v_{p+1}, ..., v_n$.*

Доказательство. Необходимость. Допустим $m > 0$. По условию $V \neq const$, а $\dim K_V = n$. Поэтому справедливо представление $\mathbb{R}^n = L_V^{\perp} \oplus L_V,\ K_V = \mathcal{K}_V \oplus L_V$, причем $\dim L_V^{\perp} = \dim \mathcal{K}_V = p > 0$. Заметим, что $L_V = K_V \cap (-K_V)$ – максимальное линейное подпространство, содержащееся в K_V (см. [13], Theorem 2.7). Следовательно, $\mathcal{K}_V$ – строго выпуклый конус [1] Выберем базис $b^{(k)} \in K_V,\ k = 1, ..., n$ в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы в обозначениях формул (4), (5) выполнялось условие

$$b^{(k)} \in \mathcal{K}_V \subset L_V^{\perp},\ k = 1, ..., p; \quad b^{(k)} \in L_V,\ k = p+1, ..., n.$$

Определим линейное отображение $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с помощью условий $D[b^{(k)}] = -e_k,\ k = 1, ..., n$, где $\{e_k\}_1^n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Оно обладает свойством $D(I_V) = \mathbb{R}^n_-$, где $I_V \subset K_V$ – выпуклый конус с вершиной в 0, порождаемый n-мерным симплексом с вершинами $\{0, \{b_k\}_1^n\}$, а $\mathbb{R}^n_-$ – отрицательный октант в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, $D(L_V) = \mathbb{R}^m$ – линейная оболочка векторов $\{e_k,\ k = p+1, ..., n\}$, поскольку по лемме 2.1 L_V – линейное подпространство $\mathbb{R}^n$. Отсюда и из леммы 2.1 вытекает, что искомым является отображение $A = D^{-1}$. В случае $m = 0$ доказательство существенно упрощается.

Достаточность теоремы доказывается с помощью рассуждений в обратном порядке. □

Итак, заданная в $\mathbb{R}^n$ выпуклая функция V при выполнении условия $\dim K_V = n$ "эквивалентна"выпуклой функции W, возрастающей по каждой переменной, причем W может зависеть от меньшего числа переменных. В случае, когда в обозначениях формулы (2) $V = V_g$ для функции g из некоторого подкласса функций, голоморфных в $\mathbb{T}^n,\ n > 1$, все коэффициенты отображения A могут быть выбраны целыми.

---

[1] Т. е. конус, не содержащий прямых.

2.2. Структура функций, эквивалентных целым функциям, и их свойства. Рассмотрим собственный подкласс $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ класса $H(\mathbb{T}^n)$ функций, голоморфных в пространстве $\mathbb{T}^n$, эквивалентных в следующем смысле целым функциям.

Определение 2.2. ([2]; [3], определение 3.1). Функция g из класса $H(\mathbb{T}^n)$, $n > 1$ *эквивалентна целой функции* f, если существует мономиальное отображение

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_g : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n; \quad z = \mathcal{F}(w), \quad z_k = \prod_{j=1}^{n} w_j^{s_{kj}}, \ k = 1, ..., n, \tag{6}$$

где $B := \|s_{kj}\|$ – целочисленная невырожденная квадратная $n \times n$ матрица, такое, что функция $f(w) = [g \circ \mathcal{F}](w)$ допускает аналитическое продолжение $F(w)$ в $\mathbb{C}^p$, где $p \leqslant n$. Это означает, что F – целая функция p комплексных переменных $w_1, ..., w_p$, которая при $p < n$ не зависит от $w_{p+1}, ..., w_n$.[1] В этом случае будем писать $g \sim f$.

Замечание. ([12], § 1). Обратное отображение $\mathfrak{F}^{-1}$ является мономиальным отображением с дробными показателями, т. е. оно многозначное в $\mathbb{T}^n$. Однако, $g_1(z) := [f \circ \mathcal{F}^{-1}](z)$, $z \in \mathbb{T}^n$ – однозначная функция, такая что $g_1(z) \equiv g(z)$, $z \in \mathbb{T}^n$. Чтобы в этом убедиться, понадобится понятие *носителей ряда Лорана*

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{T}^n; \quad z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \tag{7}$$

в который разлагается функция g, и *степенного ряда*, представляющего целую функцию

$$f(w) = [g \circ \mathcal{F}](w) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^p} c_m w^m, \quad w \in \mathbb{T}^p.$$

Так называют соответственно множества $S_g = \{k \in \mathbb{Z}^n : \ a_k \neq 0\}$ и $S_f = \{m \in \mathbb{Z}_+^p : \ c_m \neq 0\}$. Сравнивая коэффициенты этих рядов, получаем соотношение

$$S_f = B'[S_g], \quad c_m = a_k, \quad m = B'k \in S_f, \ k \in S_g,$$

где B' – матрица, транспонированная по отношению к $B = \|s_{kj}\|$ (см. (6)). При этом удобно считать, что $S_f \subset \mathbb{Z}_+^n$, поскольку принятое в определении 2.2 условие о зависимости функции f при $p < n$ только от переменных $w_1, ..., w_p$ означает, что $m_{p+1} = \cdots = m_n = 0 \ \forall \ m \in S_f$. В этих обозначениях справедливо разложение

$$g_1(z) = [f \circ \mathcal{F}^{-1}](z) = \sum_{m \in S_f} c_m [\mathcal{F}^{-1}(z)]^m, \quad z \in \mathbb{T}^n.$$

Из найденных соотношений между носителями S_f, S_g выводим

$$\langle m, B^{-1}(lnz)\rangle = \langle B'k, B^{-1}(lnz)\rangle = \langle k, \ln z\rangle, \quad k = (B')^{-1} m \in S_g, \ m \in S_f; \ z \in \mathbb{T}^n.$$

Здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Отсюда и соотношения между коэффициентами рядов, представляющих f и g, заключаем

$$c_m [\mathcal{F}^{-1}(z)]^m = a_k z^k, \quad k = (B')^{-1} m \in S_g, \ m \in S_f; \ z \in \mathbb{T}^n.$$

Из этих рассуждений и вытекает равенство $g_1 = g$.

Целую функцию $f = g \circ \mathcal{F}$ назовем *эквивалентной функции* $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$.

Пример 2.1. ([3], пример 1′). *Пусть K - тупой угол с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^3$, направляющими векторами сторон которого являются $c_1 = (1, 2, -3), c_2 = (-3, -1, 4)$, а $g(z)$ – голоморфная функция трех комплексных переменных в $\mathbb{T}^3$, представляемая рядом Лорана* (7) *при* $n = 3$ *с носителем $S_g = K \cap \mathbb{Z}^3$. Покажем, что $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^3)$, опираясь на определение* 2.2.

Нетрудно установить, что угол K расположен в плоскости $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, $k \in \mathbb{R}^3$. Поэтому в данном случае ряд Лорана g в (7) *допускает представление*

$$g(z) = \sum_{k \in S_g} a_k \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{z_2}{z_3}\right)^{k_2}, \ z \in \mathbb{T}^3; \quad k_3 = -k_1 - k_2.$$

[1]Это можно предполагать без ограничения общности.

Рассмотрим отображение

$$z = \mathcal{F}w,\ w \in \mathbb{T}^3, \quad z_1 = \frac{w_3}{w_1 w_2^2},\ z_2 = w_1^3 w_2 w_3,\ z_3 = w_3$$

и ряд

$$f(w) = [g \circ \mathcal{F}](w) = \sum_{m \in S_f} b_m w_1^{m_1} w_2^{m_2}, \quad b_m = a_k,\ m_1 = -k_1 + 3k_2, m_2 = -2k_1 + k_2, m_3 = 0.$$

Здесь $k \in S_g \subset K$, *причем* $k_3 = -k_1 - k_2$, *а* $(k_1, k_2) \in \hat{K}$, *где* $\hat{K}$ *– проекция угла* K *на* $\mathbb{R}^2$. *Отсюда выводим:* $(k_1, k_2) = m_1 h_1 + m_2 h_2,\ m \in S_f$, *где* $h_1 = (1, 2)/5,\ h_2 = (-3, -1)/5$ *– направляющие вектора сторон угла* $\hat{K}$. *Из элементарных фактов геометрии следует, что* $m_i \geqslant 0,\ i = 1, 2$, *т. е. для любого элемента* m *носителя* S_f *имеем:* $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}_+^2$. *Итак,* $g \sim f$.

Из теоремы 2.4 вытекает следующее свойство функций класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n),\ n > 1$.

Следствие 2.1. *Пусть* $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, $M_g(r)$ *– ее модуль-максимум на остове полидиска,* $V(u) := V_g(u) = \ln M_g(e^u),\ u \in \mathbb{R}^n$ (см. определение 2.2, (1)-(2)). *Тогда в обозначениях формул* (4), (5) *выполняются равенства* $\dim K_V = n,\ \dim L_V = m := n - p$, *где* $0 \leqslant m < n$.

Доказательство. Пусть f – целая функция, эквивалентная функции g. Согласно определению 2.2 (см. (6)) найдется отображение

$$E : \mathbb{R}_0^n \to \mathbb{R}_0^n; \quad r = E(q), \quad r_k = \prod_{j=1}^{n} q_j^{s_{kj}},\ k = 1, ..., n, \tag{8}$$

где E – след отображения $\mathcal{F}$ на $\mathbb{R}_0^n$, $B = \|s_{kj}\|$ – целочисленная невырожденная квадратная $n \times n$ матрица, такая, что $M_f(q) = M_g \circ E(q),\ q \in \mathbb{R}_0^n$. Здесь M_f – модуль-максимум f на остове полидиска. Из (8) заключаем, что линейное отображение $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ u = Bv$, определяемое матрицей B, обладает свойством

$$V_f(v) := \ln M_f(e^v) = V_g(Bv),\ v \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

причем выпуклая функция V_f (см. теорему 2.1) возрастает по каждой из переменных $v_1, ..., v_p$, а при условии $p < n$ не зависит от остальных переменных $v_{p+1}, ..., v_n$. Для завершения доказательства остается применить теорему 2.4. □

Сформулируем критерий принадлежности классу $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ функции g из класса $H(\mathbb{T}^n)$, опираясь на геометрические свойства коэффициентов ее разложения в ряд Лорана.

Теорема 2.5. ([2]; [3], теорема 3.2). *Пусть* $g(z) \in H(\mathbb{T}^n),\ n > 1$ *и дано ее разложение вида* (7) *в кратный ряд Лорана. Полагаем* K_g *– наименьший замкнутый выпуклый конус с вершиной в* $0 \in \mathbb{R}^n$, *содержащий носитель* S_g *ряда* (7). *Функция* $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, *т. е. в обозначениях определения* 2.2 (см. (6)) $f(w) = [g \circ \mathcal{F}](w)$ *– целая функция, тогда и только тогда, когда множество* K_g *– строго выпуклый конус. Кроме того, верны утверждения:*

1) *носитель* S_f *степенного ряда, в который разлагается функция* f, *принадлежит некоторой подрешетке* $\mathbb{Z}_+^n$ *и обладает свойством* $S_f = B'[S_g]$, *где* S_g *– носитель ряда Лорана* (7), *а* $B' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– отображение, порождаемое матрицей, транспонированной по отношению к матрице* $B = \|s_{kj}\|$ (см. определение 2.2 и замечание к нему);

2) *если* $\dim K_g = p \leqslant n$, *то* f *– целая функция* p *комплексных переменных.*

Функции класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ играют "образующую"роль в структуре элементов класса $H(\mathbb{T}^n)$. Справедлив следующий *многомерный аналог теоремы Лорана.*

Теорема 2.6. ([2]; [3], теорема 3.3). *Пусть* $g \in H(\mathbb{T}^n)$. *Тогда*

$$g(z) = \sum_{i=1}^{m} g_i(z), \quad z \in \mathbb{T}^n,\ m = m(g) \leqslant n + 1, \tag{10}$$

где $\{g_i\}_1^m \subset H(\mathbb{T}^n)$ – *функции, эквивалентные целым функциям* (см. определение 2.2), *причем у любой функции* g_i *носитель* $S(g_i)$ *обладает свойством* $S(g_i) \subset K_i \ \forall\ i = 1, ..., m,$ *где* K_i *– строго выпуклый конус в* $\mathbb{R}^n$ *с вершиной в 0 такой, что* $\dim K_i = n$*. Кроме того,*

$$K_i \cap K_j = \varnothing,\ i \neq j,\ (i,j) \subset \{1, ..., m\}.$$

3. Характеристики роста функций класса $\boldsymbol{H(\mathbb{T}^n)}$ и их свойства

В [2]; [3], § 3 по аналогии с показателями роста целых функций многих переменных (см. [1], [11] (гл. 6-8)[1] были введены асимптотические характеристики роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$. Напомним их определения, необходимые для дальнейшего изложения.

3.1. Функция порядков. Пусть $g \in H(\mathbb{T}^n)$; M_g- максимум модуля функции g на остове полидиска (см. (1)).

Определение 3.1. ([2]; [3], определение 3.5). *Функцией порядков* функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ называется функция

$$\rho_g(u) = \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ M_g(t^u)}{\ln t}, \quad t^u = t^{u_1}, \dots, t^{u_n},\ t > 0,\ u \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Здесь $\ln^+ S = \max|\ln S, 1|,\ S > 0$. Функция g называется функцией *конечного порядка,* если её функция порядков $\rho_g(u),\ u \in \mathbb{R}^n$ – конечная функция.

Как отмечено в [3], предложение 3.6, функция порядков ρ_g функции $g \in H(\mathbb{T}^n)-$ неотрицательная сублинейная функция в $\mathbb{R}^n$, возможно, не всюду конечная. Если g – не целая функция, то ρ_g не является возрастающей функцией по каждой переменной; более того, конус ее направлений убывания (см. определение 2.1) может быть пустым множеством. Однако, геометрический смысл функции порядков ρ_g для $g \in H(\mathbb{T}^n)$ остается таким же, как и в случае целых функций. Чтобы в этом убедиться, понадобится следующее понятие выпуклого анализа.

Определение 3.2. ([13], § 8). Пусть $T-$ неограниченное замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, причем $\dim T = n$. *Асимптотическим конусом* $A(T)$ множества T называется максимальный конус с вершиной в 0, сдвиг которого помещается в множество T, т. е.

$$A(T) = \{u \in \mathbb{R}^n :\ T + u \subset T\}.$$

Предложение 3.1. *(*[13], § 8; [1], [11], гл. 1, теорема 6.5). *Пусть* $V(u),\ u \in \mathbb{R}^n-$ *выпуклая функция;*

$$epi\ V = \{(u, u_{m+1}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} :\ u_{m+1} \geqslant V(u)\}$$

– ее надграфик. Тогда асимптотический конус $A(epi\ V)$ *надграфика функции* V *совпадает с надграфиком* $\mathrm{epi}\ \gamma_V$ *ее асимптотической функции* γ_V (см. теорему 2.2).

Обсудим теперь геометрическое свойство функции ρ_g (см. (11)). Полагаем

$$\Phi_g(r) = \ln^+ M_g(r),\ r \in \mathbb{R}_0^n; \quad W_g(u) = \ln^+ \Phi_g(e^u),\ u \in \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Если W_g – выпуклая функция, то функция ρ_g является ее асимптотической функцией (ср. (2), теоремы 2.1, 2.2), и, согласно предложению 3.1, надграфик $\mathrm{epi}\ \rho_g$ – асимптотический конус $A(\mathrm{epi}\ W_g)$ надграфика функции W_g. Подобное свойство функции ρ_g справедливо и в общем случае, когда $V := W_g$ – квазивыпуклая функция, т. е. удовлетворяющая неравенству

$$V(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \max\{V(x), V(y)\} \quad \forall\ \lambda \in [0,1];\ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(см. [1], [11], гл. 6, § 2).

Покажем, что определение функции порядков ρ_g для $g \in H(\mathbb{T}^n)$ не зависит от выбора параболического луча более общей структуры

$$L(r,u) = \{rt^u = (r_1 t^{u_1}, ..., r_n t^{u_n}) :\ t > 0\}, \quad u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ r \in \mathbb{R}_0^n, \tag{13}$$

как в случае целых функций (см. [1], [11], гл. 6, лемма 2.8) и функций класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ (см. [2]; [3], теорема 3.9).

[1] См. также статьи Л.С. Маергойза в Сиб. матем. журн. 1972, т. 13, № 1, с. 118-132; 1973, т. 14, № 5, с. 1037-1056.

Теорема 3.1. *В принятых обозначениях для любого заданного* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *след функции* $\Phi_g = \ln^+ M_g$ *на каждом параболическом луче системы* $\{L(r,x),\ r \in \mathbb{R}^n_0\}$ (см. (13)) *имеет порядок роста*

$$\psi_x(r) = \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln^+ \Phi_g(rt^x)}{\ln t} \equiv \rho_g(x), \quad r \in \mathbb{R}^n_0, \tag{14}$$

где ρ_g- *функция порядков для* $g \in H(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство. Если $\psi_x(r) \not\equiv \infty$ при $r \in \mathbb{R}^n_0$, тогда существует точка $a \in \mathbb{R}^n_0$ такая, что $0 \leqslant \psi_x(a) < \infty$. Пусть $r \in \mathbb{R}^n_0 \setminus \{a\}$. По теореме 2.1 $\Phi_g(r) = \ln^+ M_g(r)$ – выпуклая функция, а $\ln^+ \Phi_g(r)$ – квазивыпуклая функция от $\ln r_1, ..., \ln r_n$. Поэтому справедливо неравенство

$$\Phi_g(t_1^\lambda s_1^\mu, \dots, t_n^\lambda s_n^\mu) \leqslant \max\{\Phi_g(t), \Phi_g(s)\} \quad \forall\ \{t,s\} \in \mathbb{R}^n_0, \tag{15}$$

где $\lambda \in (0,1),\ \mu = 1-\lambda$. Полагая $t_i = a_i \cdot t^{x_i/\lambda}$ и $s_i = a_i^{-\lambda/\mu} \cdot r_i^{1/\mu},\ i = 1, \dots, n$, находим из (15) и (14):

$$\Phi_g(rt^x) \leqslant \max\{\Phi_g(at^{x/\lambda}), A\} \leqslant \max\{t^{\varepsilon+\psi_x(a)/\lambda}, A\} \quad \forall\ t > t_0(\varepsilon). \tag{16}$$

где $A = \Phi(r_1^{1/\mu} \cdot a_1^{-\lambda/\mu}, \dots, r_n^{1/\mu} \cdot a_n^{-\lambda/\mu}),\ \varepsilon > 0$ Отсюда выводим: $\psi_x(r) \leqslant \varepsilon + \psi_x(a)/\lambda$ или (при переходе к пределу $\lambda \to 1,\ \varepsilon\ \to 0)\ \ \psi_x(r) \leqslant \psi_x(a)$. Итак, $\psi_x(r)$ – ограниченная функция в $\mathbb{R}^n_0$.

Меняя в этих рассуждениях местами a и r заключаем, что $\psi_x(a) \leqslant \psi_x(r)$. Следовательно,

$$\psi_x(r) \equiv \psi_x(a),\ r \in \mathbb{R}^n_0, \quad \rho_g(x) = \psi_x(\mathbb{I}) = \psi_x(a)\ \ \forall\ a \in \mathbb{R}^n_0,\ \mathbb{I} = (1, ..., 1).$$

□

Обратим внимание на следующий критерий функции конечного порядка в случае класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$.

Предложение 3.2. ([2]; [3], предложение 3.8). *Пусть функция* $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}_n)$, *а* K_V *– конус направлений убывания функции* $V_g(u) = \ln M_g(e^u),\ u \in \mathbb{R}^n$ (см. определение 2.1)) *с вершиной в 0. Полагаем* x *– произвольно фиксированный элемент* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *такой, что* $-x \in intK_V$, *а* ρ_g *– функция порядков для* g. *Если* $\rho_g(x) < \infty$, *то* g *– функция конечного порядка.*

Из положительной однородности функции порядков ρ_g для $g \in H(\mathbb{T}^n)$ вытекает, что ее (конечные) положительные значения определяются множеством

$$T_g = \{u \in \mathbb{R}^n :\ \rho_g(u) = 1\}, \tag{17}$$

которое называется *гиперповерхностью порядков* функции g.

Пример 3.1. *При* $n = 1$ *из теоремы Лорана о разложении голоморфной функции в кольце следует, что для любой функции* $g \in H(\mathbb{T})$ *справедливо представление:*

$$g(z) = g_+(z) + g_-\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{T} = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

где $g_+,\ g_-$ *целые функции. Если они имеют конечный ненулевой порядок, соответственно,* $\rho_+,\ \rho_-$, *то функция порядков* $\rho_g(u) = \rho_+ u,\ u > 0;\ \rho_g(u) = \rho_- u,\ u \leqslant 0$. *Поэтому множество* T_g *состоит из двух точек* $1/\rho_+,\ 1/\rho_-$.

3.2. Функция типов по заданному направлению роста. Рассмотрим теперь более тонкий показатель роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$.

Определение 3.3. ([2]; [3], определение 3.10). Пусть $g \in H(\mathbb{T}^n)$; ρ_g – функция порядков для функции g. Полагаем $\rho_g(x) \in (0,\infty)$ для фиксированного $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Функция

$$\sigma_g(r;x) = \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln^+ M_g(rt^x)}{t^{\rho_g(x)}}, \quad r \in \mathbb{R}^n_0, \tag{18}$$

называется *функцией типов по направлению* x или *функцией* x*-типов* для функции g, а величину $\sigma_g(x) := \sigma_g(\mathbb{I};x)$, где $\mathbb{I} = (1, ..., 1)$, – ее *типом по направлению* x.

Справедлива формула (см. [2]; [3], замечание к определению 3.10)

$$\sigma_g(\cdot;x) = \sigma_g(\cdot;x\tau) \quad \forall\ \tau > 0.$$

Поэтому без ограничения общности при определении функции x-типов достаточно потребовать выполнение условия $x \in T_g$ (см. (17), (18)). Отметим простейшие свойства функции x-типов (см. [2]; [3], предложение 3.11).

Предложение 3.3. *Функции* $\sigma_g(e^u; x)$, $\delta_g^x(u) := \ln \sigma_g(e^u; x)$ *являются выпуклыми функциями в области их определения* D*, причем если* $x \in T_g$*, то*

$$\sigma_g(rt^x; x) = t\sigma_g(r; x), \ \forall\ r \in \mathbb{R}_0^n, \ t > 0; \quad \delta_g^x(u + x\tau) = \delta_g^x(u) + \tau, \ \forall\ u \in \mathbb{R}^n, \ \tau \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Как и в случае функции порядков, $\sigma_g(\cdot; x)$, δ_g^x принадлежат к более широкому классу функций по сравнению с ситуацией, когда $g \in H(\mathbb{C}^n)$ (см. раздел 3.1). Покажем, что несмотря на это геометрическое свойство функции δ_g^x, $g \in H(\mathbb{T}^n)$ вполне аналогично подобному свойству в $H(\mathbb{C}^n)$.

Для простоты изложения в обозначениях предложения 3.3 полагаем $D = \mathbb{R}^n$. Из (19) заключаем: надграфик (см. предложение 3.1) $I_g(x) :=$ epi δ_g^x функции δ_g^x $-$ выпуклый цилиндр. Пусть $\Phi_g = \ln^+ M_g$, $W_g(u) = \ln^+ \Phi_g(e^u)$, $u \in \mathbb{R}^n$. Из (18)-(19) следует равенство

$$\limsup_{\tau\to\infty} \left[W_g(x\tau + u) - \tau - \delta_g^x(u)\right] = \limsup_{\tau\to\infty} \left[W_g(x\tau + u) - \delta_g^x(x\tau + u)\right] = 0, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Поэтому по аналогии со случаем целых функций (см. [1], [11], гл. 6, определения 3.5-3.6) дадим

Определение 3.4. При каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^n$ невертикальную прямую

$$E = \{(x\tau + u, \tau + \delta_g^x(u)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ \tau \in \mathbb{R}\}$$

назовем (верхней одномерной) *x-асимптотой функции* W_g, а цилиндр $I_g(x) =$ epi δ_g^x, граница которого (график функции $y = W_g(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$) является линейчатой поверхностью, образованной всеми x-асимптотами функции W_g, назовем *асимптотическим x-цилиндром* надграфика epi W_g функции W_g.

Отметим важное нетривиальное свойство функции x-типов для функций класса $H(\mathbb{T}^n)$, содержащее критерий конечной функции типов по заданному направлению роста и ее структуру.

Обозначим символом $Y_H = \{\rho\}$ класс всех конечных неотрицательных сублинейных функций в $\mathbb{R}^n$ за исключением функции $\rho_0(u) \equiv 0$, $u \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\rho \in Y_H$,

$$\mathfrak{M}_n(\rho) = \{g \in H(\mathbb{T}^n) : \ \rho_g(u) \equiv \rho(u), \quad u \in \mathbb{R}^n\}. \tag{20}$$

Здесь ρ_g- функция порядков g (см. (11)); $\mathfrak{M}_n(\rho)-$ подкласс $H(\mathbb{T}^n)$ с заданной функцией порядков (или с заданной гиперповерхностью порядков (см. (17)) $T^\rho = \{u \in \mathbb{R}^n : \ \rho(u) = 1\}$). Рассмотрим класс

$$\mathfrak{N}_n^x(\rho) = \{g \in \mathfrak{M}_n(\rho) : \ 0 < \sigma_g(x) < \infty\}, \tag{21}$$

где $x \in T^\rho$, а $\sigma_g(x)-$ тип g по направлению x (см. (17)). Ассоциируем с функцией $\rho \in Y_H$ выпуклый компакт

$$K_\rho = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, u\rangle \leqslant \rho(u)\ \forall\ u \in \mathbb{R}^n\}, \tag{22}$$

опорной функцией которого является ρ. Пусть

$$\partial\rho(x) = \{y \in K_\rho : \ \langle y, x\rangle = \rho(x)\} \tag{23}$$

– грань K_ρ, ортогональная вектору $x \in T^\rho$, или

$$\partial\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \rho(u) \geqslant \rho(x) + \langle u - x, y\rangle \quad \forall\ u \in \mathbb{R}^n\}$$

– субдифференциал выпуклой функции ρ в точке x (см. [13], гл. 5, § 23). Опираясь на метод доказательства теоремы 3.9 гл. 6 в [1], [11], получаем следующее утверждение в обозначениях формул (18)-(23).

Теорема 3.2. (Ср. [1], [11]). *Пусть* $g \in \mathfrak{N}_n^x(\rho)$*, где* $\rho \in Y_H$, $x \in T^\rho$ *(см. (21), (17)). Ассоциируем с функцией* $\rho \in Y_H$ *выпуклый компакт. Тогда функция x-типов* $\sigma_g(\cdot; x)$ *функции* g *обладает свойствами:* 1) $\sigma_g(rt^x; x) \equiv t\sigma_g(r; x) \quad \forall\ t \geqslant 0, \ r \in \mathbb{R}_0^n$;

2) *существует единственная выпуклая полунепрерывная снизу функция* $\psi : \ \partial\rho(x) \to (-\infty, \infty]$, $\psi \not\equiv \infty$*, такая, что справедливо представление*

$$\sigma_g(r; x) = \sup\{r_1^{y_1} \dots r_n^{y_n} \exp\{-\psi(y)\} : \ y \in \partial\rho(x)\}, \ r \in \mathbb{R}_0^n. \tag{24}$$

В частности, если функция $\rho \in Y_H$ *дифференцируема в точке* $x \in T^\rho$, *то найдется постоянная* $A_g = A_g(x) > 0$ *со свойством*

$$\sigma_g(r;x) = A_g \cdot \prod_{i=1}^{n} r_i^{\frac{\partial \rho}{\partial x_i}}, \quad r \in \mathbb{R}_0^n. \tag{25}$$

Замечание. Дадим другую, полезную в дальнейшем формулировку теоремы 3.2.

Символом $N_n^x(\rho)$, *где* $\rho \in Y_H$, $x \in T^\rho$, *обозначим класс положительных в* $\mathbb{R}_0^n$ *функций* $\{\varphi\}$, *логарифмически выпуклых относительно* $\ln r_1, ..., \ln r_n$[1] *и обладающих свойствами* 1) *и* 2) *x-тип-функций, указанных в теореме* 3.2. *В этих обозначениях справедливо соотношение*

$$\{\sigma_g(\cdot;x),\ g \in \mathfrak{N}_n^x(\rho)\} \subset N_n^x(\rho).$$

Выясним геометрический смысл теоремы 3.2, предполагая для простоты изложения, как и в 3.1, что W_g – выпуклая функция (см. примечание к теореме 3.9 в [1], [11], гл. 6). Из (24) имеем в обозначениях предложения 3.3:

$$\delta_g^x(u) = \ln \sigma_g(e^u;x) = \sup\{\langle u,y\rangle - \psi(y),\ \ y \in \partial\rho(x)\}, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

где $\langle u,y\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Но

$$\psi(y) = (\delta_g^x)^*(y) = \sup\{\langle u,y\rangle - \delta_g^x(u),\ u \in \mathbb{R}^n\}, \quad y \in \mathbb{R}^n; \quad \{y \in \mathbb{R}^n:\ (\delta_g^x)^*(y) < \infty\} \subset \partial\rho(x)$$

– преобразование Юнга функции δ_g^x (см. [13], гл. 3; [1], [11], гл. 1, предложение 5.3, следствие 5.4). Поэтому *каждая опорная гиперплоскость к асимптотическому x-цилиндру* $I_g(x) = epi\ \delta_g^x$ *надграфика* $epi\ W_g$ *функции* W_g (см. (12) *параллельна некоторой опорной гиперплоскости к асимптотическому конусу* $A(epiW_g) = epi\ \rho_g$ *выпуклого множества* $epi\ W_g$, *проходящей через луч* $\{(xt,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},\ t > 0\}$ (см. определения 3.4, 3.2 и пояснения к ним).

В случае класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ (см. определение 2.2) существуют простые формулы связи между характеристиками роста функций этого класса и соответствующих им эквивалентных целых функций. В близкой форме они имеются в [12], теорема 2.

Предложение 3.4. *Пусть* $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$; ρ_g– *конечная функция порядков для функции* g; f– *целая функция, эквивалентная* g; $B = \|s_{kj}\|$– *целочисленная невырожденная квадратная* $n \times n$ *матрица из показателей мономиального отображения* $\mathcal{F}$ *такого, что* $f = [g \circ \mathcal{F}]$ (см. (6)). *Полагаем* $\mathcal{B}_p = \pi_p \circ B^{-1}$, *где* $p \leqslant n$, $\pi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$; $\pi_p(v_1, ..., v_n) = (v_1, ..., v_p)$; $\mathcal{E}_p = \pi_p \circ E^{-1}$, *где* E – *след отображения* $\mathcal{F}$ *на* $\mathbb{R}_0^n$ (см. (8)).

1. *Тогда*

$$\rho_f[\mathcal{B}_p(u)] \equiv \rho_g(u),\ u \in \mathbb{R}^n,$$

где ρ_f– *функция порядков для* f.

2. *Если, кроме того, для фиксированного* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *выполняются условия* $0 < \rho_g(x) < \infty$, $0 < \sigma_g(x) < \infty$, *где* $\sigma_g(x)$ –*x-тип* g, *то функции типов* g *и* f *соответственно по направлениям* x *и* $y = \mathcal{B}_p(x)$ *связаны соотношением*

$$\sigma_f(q;y) \equiv \sigma_g(r;x),\ q = \mathcal{E}_p(r), \quad r \in \mathbb{R}_0^n.$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из доказательства следствия 2.1. Утверждение 1 вытекает из формулы (9) и определения 3.1 (см. (11)). При этом учитываем, что при $p < n$ функция $V_f(v) := \ln M_f(e^v)$, $v \in \mathbb{R}^n$ не зависит от переменных $v_{p+1}, ..., v_n$. Здесь M_f – максимум модуля целой функции f на остове полидиска.

Поскольку по условию ρ_g– конечная функция и $0 < \rho_g(x) < \infty$, $0 < \sigma_g(x) < \infty$, то по теореме 3.2 конечной является и функция типов $\sigma_g(\cdot;x)$. Утверждение 2 – следствие равенства

$$M_f(q) = [M_g \circ E](q),\ q \in \mathbb{R}_0^n$$

и определения 3.3 (см. (18)), если снова учесть, что при $p < n$ функция $M_f(q)$ не зависит от переменных $q_{p+1}, ..., q_n$ (см. определение 2.2). □

[1] Т. е. функция $W_\varphi(u) = \ln \varphi(e^u)$, $u \in \mathbb{R}^n$ является выпуклой $\forall\ \varphi \in N_n^x(\rho)$.

4. Характеристики роста функций класса $\boldsymbol{H(\mathbb{T}^n)}$ и коэффициенты их разложения в ряд Лорана

Этот раздел посвящен выводу формул, устанавливающих связь между характеристиками роста функций класса $H(\mathbb{T}^n), n > 1$ и коэффициентами их разложения в ряды Лорана. Эти формулы – полный аналог соответствующих результатов для класса $H(\mathbb{C}^n)$ целых функций ([1], [11], гл. 7, теорема 1.4), но их доказательство существенно усложняется.

Для каждой функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ справедливо разложение во всюду сходящийся в $\mathbb{T}^n$ n-кратный ряд Лорана [8], с. 50

$$g(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k z^k, \quad z^k = z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}, \quad a_k = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_r} \frac{g(z)dz}{z^{k+I}}, \quad z^{k+I} = z_1^{k_1+1}\dots z_n^{k_n+1}. \tag{26}$$

Здесь $dz = dz_1 \dots dz_n$; $\Gamma_r = \{z \in \mathbb{T}^n : |z_j| = r_j,\ j = 1, ..., n\}$ – топологическое произведение окружностей таких, что $r_j \in (0, \infty)$, $j = 1, ..., n$. Всюду в дальнейшем считаем, что носитель ряда Лорана – неограниченное множество в $\mathbb{Z}^n$, т. е. функция g не является многочленом Лорана.

Следующее утверждение дает критерий сходимости кратного ряда Лорана всюду в $\mathbb{T}^n$.

Теорема 4.1. ([2]; [3], теорема 3.4). *Для того чтобы n-кратный ряд Лорана* (26) *сходился всюду в $\mathbb{T}^n$, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты удовлетворяли условию*

$$\lim_{||k||\to\infty} \sqrt[||k||]{|a_k|} = 0, \quad ||k|| = \sum_{j=1}^n |k_j|. \tag{27}$$

Рассмотрим следующую характеристику неограниченного носителя S_g функции g.

Определение 4.1. Пусть $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; $g \in H(\mathbb{T}^n)$. Рассмотрим заданную на носителе S_g ряда Лорана (26) функцию $\lambda = \lambda_u(k) = \langle k, u\rangle,\ k \in S_g$. Множество D_g всех векторов $\{u\}$ таких, что функция λ_u неограничена сверху назовем *конусом роста носителя* S_g.

Следующее утверждение показывает, что множество D_g является конусом направлений более быстрого по сравнению со степенным роста функции g.

Предложение 4.1. *Пусть $g \in H(\mathbb{T}^n)$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ в обозначениях определения* 4.1 *не принадлежит конусу D_g тогда и только тогда, когда для максимума-модуля g на остове полидиска справедлива оценка*

$$M_g(rt^x) \leqslant C(r)t^s,\ t \geqslant t_0 > 0. \tag{28}$$

Кроме того, $\rho_g(x) = 0,\ x \notin D_g$ где ρ_g – функция порядков функции g (см. определения 3.1).

Доказательство. Необходимость. Как и в случае целых функций, праведливо неравенство (см. (26))

$$M_g(r) \leqslant S_g(r) := \sum_{k\in S_g} |a_k| r^k, \quad r \in \mathbb{R}_0^n.$$

Пусть $x \notin D_g$; $s < \infty$ – верхняя граница функции $\lambda_x(k) = \langle k, x\rangle,\ k \in S_g$. Из упомянутого неравенства для всякого фиксированного $r \in \mathbb{R}_0^n$ получаем оценку (28), в которой $C = S_g(r)$.

Достаточность. Полный аналог неравенства Коши для коэффициентов Тейлора целой функции справедлив для коэффициентов разложения функции g в ряд Лорана (см. (26))

$$|a_k| r^k \leqslant M_g(r) \quad \forall\ r \in \mathbb{R}_0^n,\ k \in S_g.$$

Отсюда при выполнении условия (28) для некоторого $s \in \mathbb{R}$ и фиксированного $r \in \mathbb{R}_0^n$ находим

$$|a_k| r^k t^\lambda \leqslant C(r)t^s,\ \lambda = \langle k, x\rangle, \quad k \in S_g,\ t \geqslant t_0 > 0.$$

Это означает, что $\lambda = \lambda_x(k) \leqslant s,\ k \in S_g$, т. е. $x \notin D_g$.

Заключительное утверждение предложения 4.1 вытекает из определения 3.1 и теоремы 3.1. □

Замечание. Если в обозначениях оценки (28) $s \leqslant 0$, то $x \in K_V$, где K_V – конус направлений убывания функции $V_g(u) = \ln M_g(e^u),\ u \in \mathbb{R}^n$ (см. (2), определение 2.1), т. е. $K_V \subset \mathbb{R}^n \setminus D_g$.[1]

[1]В общем случае возможно $K_V = \varnothing$.

Лемма 4.1. *Пусть* $g \in H(\mathbb{T}^n)$; $x \in D_g$, *где* D_g *– конус роста носителя* S_g (см. определение 4.1). *Предположим, что для фиксированного* $r \in \mathbb{R}_0^n$ *существуют постоянные* $\Delta, A > 0$ *такие, что*

$$M_g(rt^x) < \exp\{At^{\Delta}\} \quad \forall\ t > t_0, \tag{29}$$

Тогда коэффициенты разложения функции g *в ряд Лорана* (см. (26)) *удовлетворяют неравенству*

$$|a_k|r^k < \left(\frac{Ae\Delta}{\lambda}\right)^{\lambda/\Delta} \qquad \forall\ \lambda > \lambda_0; \quad \lambda = \langle k, x\rangle. \tag{30}$$

Доказательство. Из неравенства Коши для коэффициентов разложения функции g в ряд Лорана (см. доказательство предложения 4.1) и неравенства (29) выводим для достаточно больших $\lambda = \langle k, x\rangle$, учитывая, что $x \in D_g$, и полагая $\tau = \ln t$:

$$-\ln(|a_k|r^k) > \sup_{\tau > \tau_0}[\lambda\tau - Ae^{\Delta\tau}] = \frac{\lambda}{\Delta}\ln\frac{\lambda}{Ae\Delta}.$$

Теперь после элементарных преобразований приходим к неравенству (30). □

Далее понадобится дополнительное свойство функций, эквивалентных целым функциям (см. определение 2.2). Пусть $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, f – целая функция такая, что $g \sim f$. Ассоциируем с функцией g, представленной рядом (7), голоморфную функцию G, разлагающуюся в ряд Лорана, обладающий тем же носителем, что и ряд (7):

$$G(z) = \sum_{k \in S_g} z^k, \quad z^k = z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}. \tag{31}$$

Этот ряд эквивалентен степенному ряду

$$H(w) = [G \circ \mathcal{F}](w) = \sum_{m \in S_f} w^m, \quad w^m = w_1^{m_1}\dots w_p^{m_p}, \ \ p \leqslant n,$$

носитель которого совпадает с носителем ряда, представляющего целую функцию f, поскольку в обозначениях определения 2.2 и замечания к нему

$$w^m = z^k,\ c_m = a_k, \quad z = \mathcal{F}(w),\ w \in \mathbb{T}^n; \quad k \in S_g,\ m = B'k \in S_f \subset \mathbb{Z}_+^p \subset \mathbb{Z}_+^n. \tag{32}$$

Здесь $\mathcal{F} = \mathcal{F}_g$ – мономиальное отображение вида (6); $\{c_m\}$, $\{a_k\}$ – соответственно коэффициенты Тейлора функции f и коэффициенты разложения функции g в ряд Лорана; B' – матрица, транспонированная по отношению к $B = \|s_{kj}\|$ (см. (6)). Очевидно, степенной ряд $H(w)$ абсолютно сходится в области $D_p = \{w \in \mathbb{T}^p:\ 0 < |w_i| < 1,\ i = 1, ..., p\}$. Поэтому можно выделить в ней расположенное в $\mathbb{R}_0^n$ множество сходимости ряда (31).

Предложение 4.2. *В упомянутых обозначениях области сходимости ряда* (31) *принадлежит множество*

$$\{b(\alpha) := E(\alpha) = E(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}_0^n, \quad \alpha \in (0,1)^n\},$$

где E *– след отображения* $\mathcal{F}$ *на* $\mathbb{R}_0^n$ (см. (8)), *причем* $b(\alpha) \to I$ *при* $\alpha \to I$, *где* $I = (1, ..., 1)$.

Лемма 4.2. *Пусть функция* $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, $n > 1$ *эквивалентна целой функции* f; $x \in D_g$ (см. определения 2.2, 4.1). *Предположим коэффициенты разложения функции* g *в ряд Лорана вида* (7) *удовлетворяют неравенству* (ср. (30))

$$|a_k|\left(\frac{r}{b}\right)^k < \left(\frac{Ae\Delta}{\lambda}\right)^{\lambda/\Delta} \qquad \forall\ \lambda > \lambda_0; \quad \frac{r}{b} = \frac{r_1}{b_1}\dots\frac{r_n}{b_n};\ \lambda = \langle k, x\rangle. \tag{33}$$

при некоторых $r \in \mathbb{R}_0^n$, $\alpha \in (0,1)^n$, $A > 0$, $\Delta > 0$, *где в обозначениях предложения* 4.2 $b = b(\alpha) = E(\alpha)$. *Тогда существует постоянная* C *такая, что*

$$M_g(rt^x) < Ce^{At^{\Delta}} \quad \forall\ t > t_0;\ rt^x = (r_1t^{x_1}, \dots, r_nt^{x_n}). \tag{34}$$

Доказательство. Заменим переменные в неравенстве (33) следующим образом. Полагаем $r = E(q)$, где $q \in \mathbb{R}_0^n$. (см. (8)). Преобразуем левую часть неравенства (33), опираясь на формулу (32):

$$|a_k|\left(\frac{r}{b}\right)^k = |a_k|\left[\frac{E(q)}{E(\alpha)}\right]^k = |a_k|\left[E\left(\frac{q}{\alpha}\right)\right]^k = |c_m|\left(\frac{q}{\alpha}\right)^m, \quad m = B'k,\ k \in S_g, \tag{35}$$

где $\{c_m,\ m \in S_f\}$ – коэффициенты Тейлора целой функции $f = g \circ \mathfrak{F}$ (см. (6)). Теперь трансформируем параметр λ в правой части неравенства (33):

$$\lambda = \langle k, x\rangle = \langle k, By\rangle = \langle B'k, y\rangle = \langle m, y\rangle, \quad k \in S_g,\ m = B'k \in S_f,$$

где $y := (y_1, ..., y_n) = B^{-1}x \in \mathbb{R}_0^n$; $B = \|s_{kj}\|$ – невырожденная матрица, определяющая мономиальное отображение $\mathcal{F}$ (см. (6)), B' – матрица, транспонированная по отношению к B. Но при $p < n$ имеем $S_f \subset \mathbb{Z}_+^p$, т. е. координаты $m_{p+1}, ..., m_n$ вектора m равны нулю (см. определение 2.2 и замечание к нему). Поэтому в общем случае справедливо равенство

$$\lambda = \langle k, x\rangle = \langle m, y\rangle_p := \sum_{i=1}^{p} m_i y_i, \quad k \in S_g,\ m = B'k \in S_f. \tag{36}$$

Отсюда и из (35) заключаем, что неравенство (33) преобразуется к следующему неравенству для коэффициентов Тейлора функции f:

$$|c_m|\left(\frac{q}{\alpha}\right)^m < \left(\frac{Ae\Delta}{\lambda}\right)^{\lambda/\Delta} \quad \forall\ \lambda > \lambda_0; \quad \lambda = \langle m, y\rangle_p.$$

Из равенства

$$M_f(qt^y) = M_g(rt^x),\ r = E(q) \quad t > 0, \tag{37}$$

учитывая, что при $p < n$ функция $M_f(v) = M_g \circ E(v),\ v \in \mathbb{R}_0^n$ не зависит от переменных $v_{p+1}, ..., v_n$ (см. определение 2.2), находим: вектор $(y_1, ..., y_p) \in D_f$, где D_f – конус роста носителя S_f функции $f \in H(\mathbb{C}^p)$, поскольку $x \in D_g$.

При выполнении этих условий существует постоянная $C > 0$ такая, что целая функция f удовлетворяет неравенству ([1], [11], гл. 7, лемма 1.3)

$$M_f(qt^y) < Ce^{At^\Delta} \quad \forall\ t > t_0;\ qt^y = (q_1 t^{y_1}, \dots, q_p t^{y_p}).$$

Возвращаясь к прежним переменным, убеждаемся в справедливости леммы (см. (36)-(37)). □

Перейдем теперь непосредственно к выводу формул связи между характеристиками роста функций класса $H(\mathbb{T}^n),\ n > 1$ и коэффициентами их разложения в ряды Лорана.

Теорема 4.2. (Ср. [1], [11], гл. 7, теорема 1.4). *Пусть $g \in H(\mathbb{T}^n)$; D_g – конус роста носителя S_g* (см. определение 4.1). *Полагаем*

$$\beta_g(u) = \limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda \ln \lambda}{-\ln|a_k|},\ \lambda = \langle k, u\rangle; \quad u \in D_g, \tag{38}$$

где $\{a_k\}$ – коэффициенты разложения функции g в ряд Лорана (см. (26)), *причем $(-\ln|a_k|)^{-1} = 0$, если $a_k = 0$. Тогда*

1) *функция порядков g* (см. определение 3.1) *обладает свойством $\rho_g(u) \equiv \beta_g(u),\ u \in D_g$;*

2) *Если в обозначениях формул* (20)-(21) *$\rho \in Y_H,\ g \in \mathfrak{M}_n(\rho)$, тогда для каждого $x \in \{u \in \mathbb{R}^n : \rho(u) > 0\}$ функция типов $\sigma_g(r; x)$ функции g* (см. определение 3.3) *определяется формулой*

$$[\sigma_f(r; x)e\rho(x)]^{1/\rho(x)} = \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{1/\rho(x)} \cdot (|a_k|r^k)^{1/\lambda}, \quad \lambda = \langle k, x\rangle,\ \rho(x) = \rho_g(x), \quad r \in \mathbb{R}_0^n. \tag{39}$$

Доказательство. 1. Зафиксируем $x \in D_g$. Если $\rho_g(x) < \infty$, тогда неравенство (29) справедливо при $A = 1$, $r = \mathbb{I}$, $\Delta = \rho_g(x) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. При этих ограничениях, опираясь на лемму 4.1, выводим: верно неравенство (30). Отсюда после элементарных преобразований получаем (см. (38)): $\beta_g(x) \leqslant \rho_g(x) + \varepsilon\ \forall\ \varepsilon > 0$, т. е. $\beta_g(x) \leqslant \rho_g(x)$. Заметим, что $\beta_g(u) \geqslant 0,\ u \in D_g$, так как $\ln|a_k| \to -\infty$ при $\lambda \to \infty$ (см. (38), (27)). Итак, $\beta_g(x) = \rho_g(x)$, если $\rho_g(x) = 0$.

2. Пусть теперь $\rho_g(x) > 0$. Согласно теореме 2.6 для функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ справедлива формула (10). В ее обозначениях рассмотрим подмножество $\{g_j \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n),\ j \in A_x\}$ слагаемых, "образующих" функцию g, где

$$A_x = \{i \in (1,...,m):\ S(g_i) \cap \Pi_x \neq \varnothing\}, \quad \Pi_x = \{k \in \mathbb{Z}^n:\ \lambda = \langle k, x\rangle > \lambda_0\} \tag{40}$$

при любых достаточно больших значениях $\lambda_0 > 0$. Убедимся, что множество $A_x \neq \varnothing$. Иначе найдется число λ_0 такое, что $\langle k, x\rangle \leqslant \lambda_0\ \forall\ k \in S_g$, где S_g – носитель функции g. Это означает $x \notin D_g$, что противоречит условию.

Допустим $\beta_g(x) < \infty$ (см. (38)). Символом $\beta_i(x)$ обозначим число, отличающееся от $\beta_g(x)$ лишь тем, что в (38) при $u = x$ полагаем $k \in S(g_i)$, где $S(g_i)$ – носитель слагаемого $g_i \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ функции g (см. (40)). Пусть $\mathcal{F}_i$ – мономиальное отображение вида (6), существующее для функции g_i; E_i – след отображения $\mathcal{F}_i$ на $\mathbb{R}^n_0$; $b^{(i)} = b^{(i)}(\alpha) = E_i(\alpha),\ \alpha \in (0,1)^n$ (см. определение 2.2, предложение 4.1). Из теоремы 4.1 вытекает соотношение (ср. (38))

$$\beta_i(x) = \limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda(\ln\lambda - \ln e\Delta)}{-\ln|a_k| + \langle k, \ln b^{(i)}\rangle} \leqslant \Delta, \qquad \lambda = \langle k, x\rangle,\ k \in S(g_i);\ i \in A_x;\ \Delta = \beta_g(x) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$. Поэтому справедлива оценка для коэффициентов Лорана слагаемого g_i функции g

$$|a_k| < [b^{(i)}]^k \left(\frac{e\Delta}{\lambda}\right)^{\lambda/\Delta} \qquad \forall\ \lambda > \lambda_0; \quad \lambda = \langle k, x\rangle,\ k \in S(g_i),\ i \in A_x.$$

Отсюда, применяя лемму 4.2, приходим к неравенству при $A = 1$, $r = \mathbb{I}$, $\Delta = \beta_g(x) + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$

$$M_{g_i}(t^x) < Ce^{t^\Delta} \quad \forall\ t > t_i;\ i \in A_x. \tag{41}$$

Наконец, из формулы (10) выводим в обозначениях соотношения (40)

$$M_g(r) \leqslant \sum_{i=1}^m M_{g_i}(r) = \Sigma_1 + \Sigma_2;\ \Sigma_1 = \sum_{i\in A_x} M_{g_i}(r);\ \Sigma_2 = \sum_{i\notin A_x} M_{g_i}(r), \quad r \in \mathbb{R}^n_0.$$

Теперь, опираясь на неравенство (41) и предложение 4.1, заключаем, что найдутся постоянные $C_j > 0,\ j = 1,2$ и $s \in \mathbb{R}$ такие, что

$$M_g(t^x) < C_1 e^{t^\Delta} + C_2 t^s, \quad t > 0.$$

Применяя формулу (11), выводим $\rho_g(x) \leqslant \Delta = \beta_g(x) + \varepsilon,\ \rho_g(x) \leqslant \beta_g(x)$. Противоположное неравенство было доказано в п. 1. Кроме того, доказано, что предположение о конечности одного из чисел $\rho_g(x),\ \beta_g(x)$ означает конечность другого. Поэтому равенство $\rho_g(x) = \beta_g(x)$ справедливо и в том случае, когда одно из этих чисел равно ∞. Итак, формула (38) верна.

3. Утверждение 2) теоремы доказывается тем же способом. При использовании лемм 4.1, 4.2 полагаем $\Delta = \rho(x) = \rho_g(x)$. Согласно теореме 3.2, функция x-типов $\sigma_g(\cdot; x)$ является конечной. Это определяет конечность и выпуклой относительно $\ln r_1, ..., \ln r_n$ функции $A_g(r; x),\ r \in \mathbb{R}^n_0$, определяемой правой частью формулы (39). В частности, если $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, то, применяя предложение 4.2, находим в его обозначениях равенство

$$A_g(r; x) = \lim_{\alpha\to I} A_g\left[\frac{r}{b(\alpha)}; x\right], \quad I = (1, ..., 1), \quad r \in \mathbb{R}^n_0,$$

используемое при доказательстве формулы (39). □

Замечание. При условии $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ доказательство теоремы существенно упрощается: оно опирается на аналогичные формулы для целых функций ([1], [11], гл. 7, теорема 1.4). В этом можно убедиться, применяя метод замены переменных, продемонстрированный при доказательстве леммы 4.2 (см. также [12]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маергойз Л. С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике*, Новосибирск, Наука, Сиб. отделение, 1991.
2. Маергойз Л. С. “Многомерный аналог разложения голоморфной функции в ряд Лорана и смежные вопросы”, *Доклады Академии наук*, 2013, **452**, № 5, 486–489.
3. Маергойз Л.С., “Расширения класса целых функций многих переменных и смежные вопросы”, *Сибирский матем. журн.*, 2014, **55**, № 5, 1137–1159.
4. Райков Д. А. *Векторные пространства*, М.: Физматгиз, 1962.
5. Ронкин Л. И., *Введение в теорию целых функций многих переменных*, М.: Наука, 1971.
6. Ронкин Л. И., “Целые функции”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*, **9**, *Комплексный анализ – многие переменные*–3, М.: ВИНИТИ, 1986, 5–36.
7. Хованский А.Г., “Многогранники Ньютона (разрешение особенностей)”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики*, М.: ВИНИТИ, 1983, 207–239.
8. Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ. Часть II*, М.: Наука, 1985.
9. Fulton W., *Introduction to Toric Varieties*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1993.
10. Lelong P. Gruman L., *Entire Functions of Several Complex Variables*, Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1986.
11. Maergoiz L. S., *Asymptotic Characteristics of Entire Functions and Their Applications in Mathematics and Biophysics*, Second edition (revised and enlarged), Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2003.
12. Maergoiz L. S. “Laplace-Borel Transformation of Functions Holomorphic in the Torus and Equivalent to Entire Functions”, *Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory,* Editors M. Ruzhansky, S. Tikhonov. Birkhauser, Switzerland, 2016, 195–209.
13. Rockafellar P. T., *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

Завьялов Максим Николаевич
Сибирский федеральный университет
E-mail: zavyalovmn@mail.ru

Маергойз Лев Сергеевич
Сибирский федеральный университет
E-mail: bear.lion@mail.ru